FIŞA DE LUCRU
Clasa a VI-a
C.M.M.D.C. şi C.M.M.M.C

Pop Sever ,
Şcoala Gimnazială Vasile Alecsandri,
Baia Mare

1.Determinaţi numerele naturale a şi b în fiecare din următoarele situaţii:

a) (a;b)=18 şi a+b=180
b) (a;b)=8 şi ab=1344
c) (a;b)=8 şi $a^2+b^2=832$
d) (a;b)=28 şi [a;b]=784
e) (a;b) = 6 şi a b = 5940.
f) [a;b] = 180 si a + b = 96.
g) (a;b)=10 şi $3^a+5b=180$.
h) a+b=140 şi $[a,b]=168$.

$$\left.\begin{matrix} 28|a \\ 28|b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=28m \\ b=28n \\ (m,n)=1 \end{cases} \Rightarrow 28m\cdot 28n = 28\cdot 784 \Rightarrow 28mn = 784 \,|: 28 \Rightarrow mn = 28$$

m	1	4	7	28
n	28	7	4	1

a	28	112	196	784
b	784	196	112	28

2.Suma a trei numere naturale este 2009 .Împărţind al treilea număr la suma primelor două numere se obţine câtul 3 şi restul 5 . Dacă c.m.m.d.c al primelor două numere este 167 să se determine cele trei numere .

3.Determinaţi numerele naturale x cuprinse între 2000 si 3000 care împarţite la 6,7,11 dau resturile 3,1 , respectiv 4 .

4. Să se gasească cel mai mic număr natural care împărţit pe rând la 372 şi 738 dă resturile 362 şi respectiv 728. (G.M. 9/10 -1982)

5.Împărţind 2 414 şi 1 856 la acelaşi număr natural, obţinem resturile 17 şi respectiv 23. Să se afle numărul la care au fost împărţite.

6.Se consideră numerele naturale $a=8n+5$; $b=12n+7$ .Arătaţi că a şi b sunt numere prime între ele pentru orice număr natural n .

7.Determinaţi numerele a,b , c ştiind că c.m.m.d.c. al numerelor , $\overline{abc}$ şi $\overline{cba}$ este 36.

8. Dacă a, b $\in N$. Să se arate că au loc implicaţiile:

a) $7/(2^a+3b) \Rightarrow 7/(5^a+4b)$
b) $7/(a+b) \Rightarrow 7/(3^a-4b)$
c) $7/(a+6b) \Rightarrow 7/(3^a+4b)$.
d) $7|3a+4b \Rightarrow 7|4a+3b$

e) $5 \mid 2a+3b \Leftrightarrow 5 \mid 3a+2b$

9 . Fie A=$x+5y+3z$, B=$3x+4y+z$, $x,y,z \in$ IN*. Arătaţi că dacă A şi B se divid cu 11 atunci z se divide cu 11.

10. Fie numerele naturale nenule a,b, $A=9a+10b$ si $B=8a+9b$ .Arătați că $(a,b)=(A,B)$.

11.Determinați numerele naturale de trei cifre care împărțite la 4,5,6,și 7 dau resturile 1,2,5,6 .

12 . Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ care prin împarțire la 7,11 respectiv 13 dau resturile 3,6, respectiv 4 .

13. Aflați toate numerele naturale cuprinse între 600 si 800 care, împărțite pe rând la 3, 15, respectiv 20, dau de fiecare dată restul par și câturi nenule.

14.Să se afle numărul excursioniștilor, știind că, dacă îi așezăm în rând câte 2, câte 3, câte 4 sau câte 6, rămâne de fiecare dată câte un elev singur. Daca îi așezăm în rând câte 7, rămâne un rând cu 2 elevi.

15. .Determinați numerele a, b cu a>b , știind că $3\cdot[a;b]+5\cdot(a,b)=123$.

16.Aflați numerele naturale a și b știind că $[a,b]-(a,b)=176$ si $[a,b]=45(a,b)$.

17 .Determinați numerele naturale a și b care verifică relația : $(a,b)+3[a,b]=57$.

18. Să se determine numerele naturale nenule a și b astfel încât ele să verifice relația:
$ab+(a,b)+4[a,b]=2019$.

19.Aflați numerele naturale a și b care îndeplinesc condiția :
$ab=2[a;b]+5(a;b)+2020$.

Soluții

1.Soluție : a) fie d cel mai mare divizor comun al numerelor a și b . Conform definiției c.m.m.d.c. avem

$$\left.\begin{array}{l} d\,|a \\ d\,|b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = dm \\ b = dn \\ (m,n)=1 \end{cases}$$

În cazul nostru

$$\left.\begin{array}{l} 18|a \\ 18|b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 18m \\ b = 18n \\ (m,n)=1 \end{cases} \Rightarrow 18m+18n=180 \Rightarrow 18(m+n)=180 \,|:18 \Rightarrow m+n=10$$

m	1	3	7	10
n	10	7	3	1

a	18	54	126	180
b	180	126	54	18

b) $$\left.\begin{array}{l} 8|a \\ 8|b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 8m \\ b = 8n \\ (m,n)=1 \end{cases} \Rightarrow 8m \cdot 8n = 1344 \Rightarrow 64mn = 1344 \,|:64 \Rightarrow mn = 21$$

m	1	3	7	21
n	21	7	3	1

a	8	24	56	168
b	168	56	24	8

c) $$\left.\begin{array}{l} 8|a \\ 8|b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 8m \\ b = 8n \\ (m,n)=1 \end{cases} \Rightarrow (8m)^2 + (8n)^2 = 832 \Rightarrow 64\left(m^2+n^2\right) = 832 \,|:64 \Rightarrow m^2+n^2=13$$

m	2	3	7	21
n	21	7	3	1

a	8	24	56	168
b	168	56	24	8

d) (a;b)=28 și [a;b]=784 , iar folosind relația de legătură dintre c.m.m.d.c și c.m.m.m.c și anume $(a,b)[a,b]=ab$, obținem că $ab = 28 \cdot 784$.

3.Solutie :

$$T.I.R \Rightarrow \begin{cases} x = 6c_1+3 \\ x = 7c_2+1 \\ x = 11c_3+4 \end{cases} \Bigg| -15 \Leftrightarrow \begin{cases} x-15 = 6c_1-12 \\ x-15 = 7c_2-14 \\ x-15 = 11c_3-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-15 = 6(c_1-2) \\ x-15 = 7(c_2-2) \\ x-15 = 11(c_3-1) \end{cases} \Leftrightarrow x-15 \in M_6 \cup M_7 \cup M_{11} \Leftrightarrow$$

$$x-15 \in M_{6\cdot 7\cdot 11} \Leftrightarrow x-15 \in M_{462} \Leftrightarrow x = 462k+15$$

$$2000 < x < 3000 \Leftrightarrow 2000 < 462k+15 < 3000 \,|-15 \Leftrightarrow 1985 < 462k < 2985 \Leftrightarrow k \in \{5,6\}$$

$$x \in \{2325, 2787\}$$

6.Soluție :

Fie d un divizor comun al numerelor 8n+5 și 12n+7 .

Avem $\left.\begin{matrix} d\,|8n+5 \\ d\,|12n+7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d\,\big|(12n+7)\cdot 2-(8n+5)\cdot 3 \Rightarrow d\,|-1 \Rightarrow d=1$, deci numerele a și b sunt prime între ele.

<u>8.Soluție :</u>

a) $\left.\begin{matrix} 7\,|2a+3b \\ 7\,|7a+7b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7\,|7a+7b-2a-3b \Rightarrow 7\,|5a+4b$.

<u>10.Solutie</u> : notez cu $d=(a,b)$; $\quad D=(A,B)$ si trebuie sa aratam ca D=d .

Avem

$$\left.\begin{matrix} D|9a+10b \\ D|8a+9b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} D\big|(9a+10b)\cdot 8 \\ D\big|(8a+9b)\cdot 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} D|72a+80b \\ D|72a+81b \end{matrix}\right\} \Rightarrow D|b$$

$$\left.\begin{matrix} D\big|(9a+10b)\cdot 9 \\ D\big|(8a+9b)\cdot 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} D|81a+90b \\ D|80a+90b \end{matrix}\right\} \Rightarrow D|a$$

$$\left.\begin{matrix} D|a \\ D|b \end{matrix}\right\} \Rightarrow D\big|(a,b) \Rightarrow D|d\,(1)$$

Cum $d=(a,b) \Rightarrow \left.\begin{matrix} d\,|a \\ d\,|b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d\,|9a+10b \\ d\,|8a+9b \end{matrix}\right\} \Rightarrow d\,|D(2)$

Din (1) si (2) rezulta D=d .

<u>11.Solutie :</u>

$$\left.\begin{matrix} \overline{abc}=4c_1+1 \\ \overline{abc}=5c_2+2 \\ \overline{abc}=6c_3+5 \\ \overline{abc}=7c_4+6 \end{matrix}\right| +43 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \overline{abc}+43=4c_1+44 \\ \overline{abc}+43=5c_2+45 \\ \overline{abc}+43=6c_3+48 \\ \overline{abc}+43=7c_4+49 \end{matrix}\right| +43 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \overline{abc}+43=M_4 \\ \overline{abc}+43=M_5 \\ \overline{abc}+43=M_6 \\ \overline{abc}+43=M_7 \end{matrix}\right| \Rightarrow \overline{abc}+43=M_{420}$$

$$\Rightarrow \overline{abc}+43 \in \{420,840\} \Rightarrow \overline{abc} \in \{377,797\}$$

<u>12.Solutie :</u>

$$\left.\begin{matrix} \overline{abcd}=7c_1+3 \\ \overline{abcd}=11c_2+6 \\ \overline{abcd}=13c_3+4 \end{matrix}\right| -17 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{abcd}-17=7c_1-14 \\ \overline{abcd}-17=11c_2-11 \\ \overline{abcd}-17=13c_3-13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \overline{abcd}-17=7(c_1-2) \\ \overline{abcd}-17=11(c_2-1) \\ \overline{abcd}-17=13(c_3-1) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \overline{abcd}-17 \in M_7 \cup M_{11} \cup M_{13} \Rightarrow$$

$$\overline{abcd}-17 \in M_{7\cdot 11\cdot 13} \Leftrightarrow \overline{abcd}-17 \in M_{1001} \Leftrightarrow \overline{abcd}-17 \in \{1001,2002,...,9009\} \Leftrightarrow$$

$$\overline{abcd} \in \{1018,2019,3020,4021,5022,6023,7024,8025,9026\}$$

<u>15.Soluție</u> :

Fie $d=(a,b) \Rightarrow \begin{cases} a=dm \\ b=dn \\ (m,n)=1 \end{cases}$.

Din relația de legătură $[a,b]\cdot(a,b)=ab \Rightarrow [a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}=\dfrac{dmdn}{d}=dmn$.

Ecuația din enunț revine la :

$$3dmn+5d=123 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} d(3mn+5)=3\cdot 41 \\ 3mn+5>8 \\ 3mn+5\neq M3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} d=3 \\ 3mn+5=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=3 \\ mn=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mn=12 \\ (m,n)=1 \Rightarrow (m,n)\in\{(12,1),(4,3)\} \Rightarrow (a,b)\in\{(36,3),(12,9)\} \\ m>n \end{cases}$$

17.Solutie : efectuez notatia $(a,b)=d$ .Pe baza definitiei c.m.m.d.c , avem :

$a=dm;\quad b=dm,\quad (m,n)=1$ .Pe baza relatiei dintre c.m.m.d.c. si c.m.m.m.c , obtinem :

$[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}=\dfrac{d^2mn}{d}=dmn$.

Inlocuind in enunt avem : $d(1+3mn)=57$ si cum $1+3mn$ nu este divizibil cu 3 avem doar posibilitatea ca $d=3$, deci $1+3mn=19 \Leftrightarrow mn=6$.

Deci $(m,n)\in\{(1,6);(2,3);(3,2);(6,1)\} \Rightarrow (a,b)\in\{(3,18);(6,9);(9,6);(18,3)\}$.

18.Solutie : notam cu $d=(a,b)$ si respectiv cu $m=[a,b]$ si relatia din enunt devine :

$dm+d+4m=2019 \,|+4 \Leftrightarrow$

$d(m+1)+4(m+1)=2023 \Leftrightarrow$

$(d+4)(m+1)=7\cdot 17^2 \Leftrightarrow (d+4;m+1)\in\{(7,17^2);(17,7\cdot 17)\} \Leftrightarrow$

$(d,m)\in\{(3;288),(13,118)\}$

$1)\begin{cases} d=3 \\ m=288 \end{cases} \Leftrightarrow ab=dm=288\square 3=864$

$$\begin{cases} 3|a \\ 3|b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3x \\ b=3y \\ (x,y)=1 \end{cases} \Rightarrow 9xy=864 \Rightarrow \begin{cases} xy=96 \\ (x,y)=1 \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(1,96),(3,32),(32,3),(96,1)\}$$

$\Rightarrow (a,b)\in\{(3,288),(9,96),(288,3),(96,9)\}$

$2)\begin{cases} d=13 \\ m=118 \end{cases} \Leftrightarrow ab=dm=13\cdot 118=1534$

$$\begin{cases} 13|a \\ 13|b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=13x \\ b=13y \\ (x,y)=1 \end{cases} \Rightarrow 169xy=1534$$

Ultimul caz nu da solutii deoarece 13^2 nu divide pe 1534.

19.Solutie : notez cu $m=[a;b]$, respectiv $d=(a;b)$ și se știe că $d|m$ si ca $dm=ab(1)$.

$ab=2[a;b]+5(a;b)+2020 \Leftrightarrow$

$md=2m+5d+2020 \Leftrightarrow$

$md-2m-5d=2020 \,|+10 \Leftrightarrow$

$md-2m-5d+10=2030 \Leftrightarrow$

$m(d-2)-5(d-2)=2030 \Leftrightarrow$

$m(d-2)-5(d-2)=2\cdot 5\cdot 7\cdot 29 \Leftrightarrow$

$(m-5)(d-2)=2\cdot 5\cdot 7\cdot 29 \Leftrightarrow$

$(d-2;m-5)\in\{(1;2030),(2;1015),(5;406),(7;290),(10;203),(14;145),(35;58),(29;70)\} \Rightarrow$

$(d;m)\in\{(3;2035),(4;1020),(7;411),(9;295),(12;208),(16;150),(37;63),(31;75)\}$

Dintre acestea cea care indeplineste conditia ca $d\,|\,m$ este $(4;1020)$.

Deoarece $d=(a;b) \Rightarrow \begin{cases} a=dx \\ b=dy \\ (x;y)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4x \\ b=4y \\ (x;y)=1 \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} 16xy=4\cdot 1020 \Leftrightarrow xy=255=3\cdot 5\cdot 17$

x	1	3	5	15	17	51	85	255
y	255	85	51	17	15	5	3	1

a	4	12	20	60	68	204	340	1020
b	1020	340	204	68	60	20	12	4

CUPRINS